Početní část 2 - 14.1.2021

1. Spočtěte neurčitý integrál

$$\int \frac{x + \log x}{x^2} \log x \, \mathrm{d}x. \qquad \text{(7 bodů)}$$

Určete maximální intervaly, na kterých integrál existuje. *Řešení:*

$$\int \frac{x + \log x}{x^2} \log x \, \mathrm{d}x = \int \frac{\log x}{x} \, \mathrm{d}x + \int \frac{\log^2 x}{x^2} \, \mathrm{d}x.$$

První z integrálů lze snadno uhádnout nebo vyřešit standardní substitucí $\log x = t$. (Zde by integrování per partes nevedlo k ničemu.)

$$\int \frac{\log x}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \log^2 x + C \quad \text{na } (0, \infty).$$

Naopak u druhého integrálu použijeme dvakrát per partes:

$$\begin{aligned} \int \frac{\log^2 x}{x^2} \, \mathrm{d}x &= -\frac{\log^2 x}{x} + 2 \int \frac{\log x}{x^2} \, \mathrm{d}x \\ &= -\frac{\log^2 x}{x} - \frac{2 \log x}{x} + 2 \int \frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}x \\ &= -\frac{\log^2 x}{x} - \frac{2 \log x}{x} - \frac{2}{x} + C \quad \text{na } (0, \infty). \end{aligned}$$

Celkem tedy

$$\int \frac{x + \log x}{x^2} \log x \, \mathrm{d}x = \frac{\log^2 x}{2} - \frac{\log^2 x}{x} - \frac{2 \log x}{x} - \frac{2}{x} + C \quad \text{na } (0, \infty).$$

2. Určete Taylorův polynom funkce

$$f(x) = \log(x^2 + x + 1), \qquad x \in \mathbb{R}$$

třetího stupně v bodě 0. S jeho pomocí spočtěte limitu

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{x^3} \log \left(\sqrt{\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}} \right) + \frac{1}{x^2} \right]. \qquad \text{(8 bodů)}$$

Řešení: Vyjdeme ze známého rozvoje

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \quad x \to 0,$$

kde provedeme substituci $x \mapsto x + x^2$. Tak dostaneme

$$\log(1 + x + x^2) = x + \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + o(x^3), \quad x \to 0.$$

To jest

$$T^3_{f,0}(x) = x + \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Nyní spočteme, že

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{x^3} \log \left(\sqrt{\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}} \right) + \frac{1}{x^2} \right] = \lim_{x \to 0} \frac{f(-x) - f(x) + 2x}{2x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{4}{3}x^3 + o(x^3)}{2x^3} = \frac{2}{3}.$$